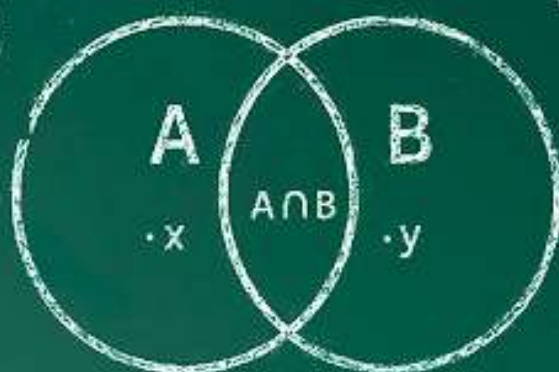
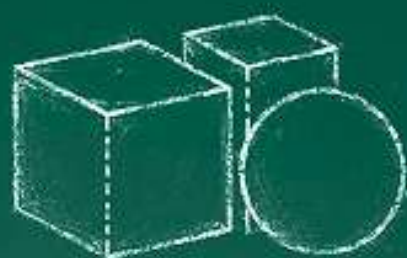


SEVEN

EDITORA
2026

Conjuntos de Números Reais



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

π



$$= 1,6180339887...$$

φ

e

$$= 2,7182818284...$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857$$



Thiago de Oliveira Coelho

EDITORIA CHEFE

Prof^o Me. Isabele de Souza Carvalho

EDITOR EXECUTIVO

Nathan Albano Valente

AUTOR DO LIVRO

Thiago de Oliveira Coelho

PRODUÇÃO EDITORIAL

Seven Publicações Ltda

EDIÇÃO DE ARTE

Evellyn Thais de Souza

EDIÇÃO DE TEXTO

Stephanie Caroline Meyer de Quadros

BIBLIOTECÁRIA

Bruna Heller

IMAGENS DE CAPA

Evellyn Thais de Souza

2026 by Seven Editora

Copyright © Seven Editora

Copyright do Texto © 2026 Os Autores

Copyright da Edição © 2026 Seven Editora

O conteúdo do texto e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Seven Publicações Ltda. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Seven Publicações Ltda é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação.

Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.



O conteúdo deste Livro foi enviado pelos autores para publicação de acesso aberto, sob os termos e condições da Licença de Atribuição Creative Commons 4.0 Internacional

CONSELHO EDITORIAL

EDITORA CHEFE

Prof. Me. Isabele de Souza Carvalho

CONSELHO EDITORIAL

Adriana Barni Truccolo - Universidade Estadual do Rio Grande do Sul
Adriana Barretta Almeida - Universidade Federal do Paraná
Alessandre Gomes de Lima - Faculdade de Medicina da Universidade do Porto
Anderson Nunes da Silva - Universidade Federal do Norte do Tocantins
Antonio da Costa Cardoso Neto - Universidade de Flores, Buenos Aires
Antônio Alves de Fontes-Júnior - Universidade Cruzeiro do Sul
Ariane Fernandes da Conceição - Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Arnaldo Oliveira Souza Júnior - Universidade Federal do Piauí, CEAD
Caio Vinicius Efigenio Formiga - Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Charles Henrique Andrade de Oliveira - Universidade de Pernambuco
Egas José Armando - Universidade Eduardo Mondlane, Moçambique
Inaldo Kley do Nascimento Moraes - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Irlane Maia de Oliveira - Universidade Federal de Mato Grosso
Janyel Trevisol - Universidade Federal de Santa Maria
Jorge Fernando Silva de Menezes - Universidade de Aveiro
Jorge Luís Pereira Cavalcante - Fundação Universitária Iberoamericana
Kleber Farinazo Borges - Universidade de Brasília
Luiz Gonzaga Lapa Junior - Universidade de Brasília
Mara Lucia da Silva Ribeiro - Universidade Federal de São Paulo
Marcelo Silva de Carvalho - Universidade Federal de Alfenas
Marcos Garcia Costa Moraes - Universidade Estadual da Paraíba
Maria Gorete Valus - Universidade Estadual de Campinas
Mônica Maria de Almeida Brainer - Instituto Federal de Goiás, Campus Ceres
Moacir Silva de Castro - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Paulo Roberto Duailibe Monteiro - Universidade Federal Fluminense
Pedro Henrique Ferreira Marçal - Universidade Vale do Rio Doce
Rafael Braga Esteves - Universidade de São Paulo
Telma Regina Stroparo - Universidade Estadual de Ponta Grossa
Valéria Raquel Alcantara Barbosa - Fundação Oswaldo Cruz
Wanderson Santos de Farias - Universidade do Desenvolvimento Sustentável
Yuni Saputri M.A - Universidade Nalanda, Índia

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

C672c

Coelho, Thiago de Oliveira.

Conjuntos de Números Reais [recurso eletrônico] /

Thiago de Oliveira Coelho. – São José dos Pinhais, PR: Editora
Seven, 2026.

Dados eletrônicos (1 PDF).

Inclui bibliografia.

ISBN 978-65-6109-425-2

1. Matemática. 2. Números. 3. Conjuntos. 4. Álgebra.

I. Título.

CDU 512

Bruna Heller - Bibliotecária - CRB10/2348

Índices para catálogo sistemático:

1 Álgebra 512

DOI: 10.56238/livrosindi202696-001

Seven Publications Company

CNPJ: 43.789.355/0001-14

editora@sevenevents.com.br

São José dos Pinhais/PR

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1.....	6
CONJUNTOS	

CAPÍTULO 2.....	14
CONJUNTOS NUMÉRICOS	

CAPÍTULO 1: CONJUNTOS

1.1 NOÇÕES INICIAIS

Dentro do estudo dos Conjuntos, há 3 noções básicas: Conjunto, Elemento e Relação de Pertinência. Conjunto é uma coleção de objetos, que são seus elementos. A relação entre um objeto e um conjunto é a relação de pertinência. Então, a relação de pertinência consiste em dizer se um objeto é elemento de um conjunto, ou seja, se um objeto pertence a um conjunto. Quando um objeto a é elemento de um conjunto A , representamos assim: $a \in A$. Por outro lado, caso a não seja um dos elementos de A , representamos assim: $a \notin A$.

Exemplo. Considere o conjunto D dos estados brasileiros que fazem divisa com o estado da Bahia: AL, ES, GO, MG, PE, PI, SE e TO. Para fins de simplificação, os estados estão listados pelas suas siglas. Sendo assim: $PE \in D$ mas $MT \notin D$.

1.2 REPRESENTAÇÕES

Conjuntos podem ser representados entre chaves ou por diagramas.

Entre chaves:

a.1) Enumeração: lista elementos do conjunto, no todo ou em parte, quando parcialmente, usa-se reticências para subtender esses elementos.

Exemplos:

$$A = \{1,2,3,4\};$$

$$B = \{-30, -27, -24, -21, \dots, 21, 24, 27, 30\};$$

$$C = \{0, 2, 4, 6, \dots\}.$$

a.2) Propriedade característica: a maior parte dos conjuntos na Matemática não são definidos especificando os seus elementos um a um, por isso, se usa a propriedade característica comum e exclusiva a todos os seus elementos. Essa propriedade define um conjunto X do seguinte modo: $X = \{x \mid x \text{ tem tal propriedade}\}$.

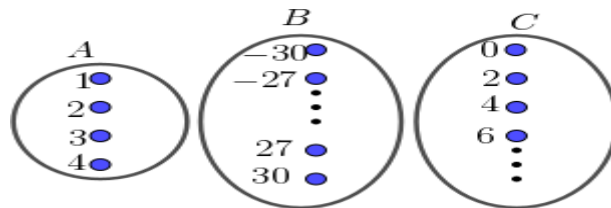
Exemplos:

$$A = \{a \mid a \text{ é inteiro positivo menor que } 5\};$$

$$B = \{b \mid b \text{ é inteiro e múltiplo de } 3 \text{ de } -30 \text{ até } 30\};$$

$$C = \{c \mid c \text{ é natural e par}\}.$$

Diagrama: geralmente se coloca pontos e o elemento ao lado de cada ponto, o referido diagrama também é conhecido como Diagrama de Venn.



Observação: geralmente utiliza-se a reticências em casos de conjuntos finitos com grande número de elementos e conjuntos infinitos, tanto na representação por meio de chaves quanto por diagrama, como ocorreu nos conjuntos B e C dos exemplos acima, que são finito e infinito, respectivamente.

1.3 ALGUNS CONJUNTOS ESPECIAIS

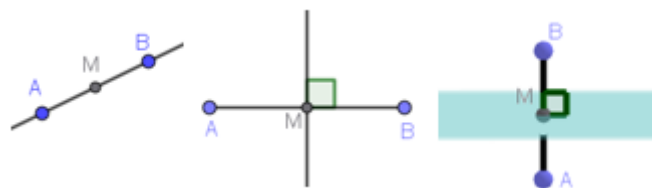
Conjunto unitário: é aquele que possui um único elemento. Exemplos:

$$C = \{x; x \text{ é capital do Brasil}\} = \{\text{Brasília}\};$$

$$S = \{x; x - 1 = 0\} = \{1\};$$

$$E = \{x; x \text{ é inteiro entre os números 3 e 5}\} = \{4\}.$$

Conjunto universo: também denominado de conjunto fundamental, é o maior conjunto do qual se pode obter as soluções de um problema, o conjunto solução do problema é parte desse conjunto. A finalidade do conjunto universo é delimitar o problema. Exemplo. Liste todos os números que têm a propriedade de serem naturais menores que 5, então temos $X = \{x \in \mathbb{N}; x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, neste caso, o conjunto universo é $\mathbb{N}$. Exemplo. Dados dois pontos A e B , qual o conjunto dos pontos equidistantes de A e B ? Depende do conjunto universo adotado. Se o conjunto universo for a reta que passa pelos pontos A e B , o conjunto é unitário e formado pelo ponto médio M do segmento $\overline{AB}$; se o conjunto universo for o plano que contém os pontos A e B , o conjunto solução é formado pelos pontos da reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$; se o conjunto universo for o espaço, o conjunto procurado é o plano mediador (perpendicular pelo ponto médio M) do segmento $\overline{AB}$, conforme as ilustrações abaixo:



Conjunto solução: também chamado de conjunto verdade, é o conjunto de valores que satisfazem uma equação, inequação ou sentença. Exemplos:

- O conjunto solução de $x^2 - 4x + 3 = 0$ é $S = \{1, 3\}$;
- O conjunto solução de $x^2 - 4x < 0$ é $S = \{0 < x < 4\}$.

Para a análise do conjunto solução, precisamos estar atentos ao conjunto universo adotado. Nos exemplos apontados na alínea c desta seção, como não explicitamos o conjunto universo, consideramos o maior possível, conjunto dos números reais (subtendido). Em alguns casos, o conjunto solução pode estar dentro de um conjunto universo explicitado e restrito a subconjuntos dos números reais (naturais, inteiros, racionais, irracionais), o que restringe o conjunto solução como nos casos apontados nos dois exemplos a seguir. Exemplos:

O conjunto solução da sentença $p(x) = x^2 - x - 2$ e $p(x) = 0$ no conjunto $\mathbb{N}$ é $S = \{2\}$, pois apesar de $p(-1) = 0$, -1 não entra no conjunto solução, visto que o conjunto universo é o conjunto dos números naturais e não existe número natural negativo;

O conjunto verdade da sentença $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \leq 0$ no universo dos inteiros é $V = \{x \in \mathbb{Z}; -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\} = \{0, 1, 2\}$, note que se o conjunto universo fosse os números racionais, irracionais ou todos os reais, teríamos um conjunto verdade infinito.

Conjunto vazio: em muitas situações, determinamos conjuntos que satisfazem a uma propriedade dentro de um conjunto universo, mas acontece que às vezes nenhum elemento de U (universo) goza da propriedade colocada. Nessa situação, o conjunto $X = \{x; x \text{ tem a propriedade } P\}$ não possui elementos, pois nenhum elemento de U satisfaz a propriedade P , portanto X é o que chamamos de conjunto vazio, que é representado por: $\emptyset$. Exemplos:

- $\{x; x \neq x\} = \emptyset$, todo número é igual a si mesmo;
- $\{x \in \mathbb{N}; x^2 + 5x + 6 = 0\} = \emptyset$, nenhum número natural é solução da equação em questão;

- $\{x \in \mathbb{Q}: x^2 = 2\} = \emptyset$, $\sqrt{2}$ é um número irracional;
- $\{x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$, $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $x = \sqrt{-1}$, isto é, não existe raiz quadrada real de número real negativo.

Observação: há duas formas de representar o conjunto X vazio, $X = \emptyset$ ou $X = \{\}$.

1.4 RELAÇÃO DE INCLUSÃO

Considerando dois conjuntos A e B , dizemos que A é subconjunto de B quando todo elemento de A também é elemento de B . Simbolicamente: $A \subset B$. Quando $A \subset B$, diz-se que A está contido em B , que A é parte de B , ou que A está incluído em B . A relação $A \subset B$ é a relação de inclusão.

- Exemplo. Os conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ seguem a relação de inclusão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Exemplo. Sejam I o conjunto dos triângulos isósceles e E o conjunto dos triângulos equiláteros. Todo triângulo equilátero é isósceles, portanto $E \subset I$.

Dizer que $X \subset Y \Leftrightarrow Y \supset X$, o símbolo $\supset$ significa contém. Para demonstrar que um conjunto X não está contido num conjunto Y , basta encontrar um elemento de X que não pertença a Y , simbolicamente: $X \not\subset Y \Leftrightarrow Y \not\supset X$.

- Exemplo. Seja $X = \{1,2,3\}$ e $Y = \{2,3,4\}$, note que $X \not\subset Y$, pois $1 \in X$ mas $1 \notin Y$, equivale a dizer que $Y \not\supset X$; reciprocamente, $Y \not\subset X$, pois $4 \in Y$ mas $4 \notin X$.
- Exemplo. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, mas $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, pois $-1 \in \mathbb{Z}$ mas $-1 \notin \mathbb{N}$, o que equivale a dizer que $\mathbb{N} \not\supset \mathbb{Z}$.
- Exemplo. Sejam $X = \{0,3,7\}$ e $Y = \{0,7\}$, $Y \subset X$, pois para todo $y \in Y$, $y \in X$, isto equivale a dizer que $X \supset Y$.

O conjunto $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto B , pois, caso se pudesse estabelecer $\emptyset \not\subset B$, aconteceria $b \in \emptyset$ tal que $b \notin B$, mas como não existe $b \in \emptyset$, somos forçados a admitir que $\emptyset \subset B$, qualquer que seja o conjunto B . A relação de inclusão $X \subset Y$ tem 3 importantes propriedades abaixo:

- Reflexiva: $X \subset X$, para todo conjunto X ;
- Transitiva: se $X \subset Y$ e $Y \subset Z$, então $X \subset Z$;

- Antissimétrica: se $X \subset Y$ e $Y \subset X$, então $X = Y$.

Conclui-se, pela propriedade antissimétrica, que dois conjuntos são iguais quando têm os mesmos elementos, ou seja, quando $X \subset Y$ e $Y \subset X$, conseqüentemente $X = Y$. Sempre que se precisar de provar a igualdade entre dois conjuntos, basta demonstrar que $X \subset Y$ e $Y \subset X$. Então, dizer que $X = Y$, é dizer que X e Y são o mesmo conjunto. Por conseguinte, para $X \subset Y$, não se exclui a possibilidade $X = Y$, igualdade que só ocorre quando $X \subset Y$ e $Y \subset X$. Mas quando $X \subset Y$ e $X \neq Y$, tem-se $X \subset Y$ e $Y \not\subset X$, nesse caso, X é uma parte própria de Y , quer dizer, X é um subconjunto próprio de Y .

- Exemplo. Considere $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2,3\}$, todo elemento de A é elemento de B , reciprocamente, todo elemento de B é elemento de A , daí tem-se que $A \subset B$ e $B \subset A$, logo $A = B$.
- Exemplo. Considere $C = \{-2,2,6\}$ e $D = \{6,2,-2\}$, nesse caso, C e D são conjuntos iguais mesmo que os seus elementos não estejam na mesma ordem, basta apenas que eles tenham os mesmos elementos para garantir a igualdade entre eles.
- Exemplo. Considere $E = \{7,8,9,9,9,10\}$ e $F = \{7,8,9,10\}$. Nesse caso, E e F são conjuntos iguais mesmo que os elementos do conjunto E estejam repetidos, pois os conjuntos E e F têm os mesmos elementos, portanto $E = F$.
- Exemplo. Tem-se $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, mas não se tem $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$, pois $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$ mas $\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$, como $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ mas $\mathbb{Z} \not\supset \mathbb{Q}$, logo $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$.

Dado um conjunto X , indica-se por $P(X)$ o conjunto das partes de X , que é o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de X . Dizer que $A \in P(X)$ é a mesma coisa que afirmar que $A \subset X$. $P(X)$ nunca é vazio, pois há pelo menos $\emptyset \in P(X)$, porque $\emptyset$ é parte própria de qualquer conjunto.

Exemplo. Dado $X = \{1,2\}$, logo $P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

O conjunto das partes de qualquer conjunto tem a seguinte propriedade:

Se um conjunto X tem n elementos, $P(X)$ tem 2^n elementos.

- Prova 1: para $X = \{\}$, $n = 0$, logo $P(X)$ tem $2^0 = 1$ elemento. Se $X \neq \emptyset$, com n elementos, isso acarreta $n \neq 0$, então para cada elemento de X , temos a decisão de colocá-lo ou não como elemento do subconjunto de X , como para cada elemento de

X tem-se 2 possibilidades (sim ou não) quanto a inseri-lo num subconjunto de X , o número de elementos de $P(X)$ é $p = 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots \cdot 2 = 2^n$.

- Prova 2: Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ com n elementos, $P(X)$ é formado por subconjuntos de 0 a n elementos. Para formar subconjuntos com nenhum elemento, temos apenas o $\emptyset$, ou seja, $C_{n,0} = 1$ possibilidade, para formar subconjuntos de 1 elemento, tem-se $C_{n,1} = n$ possibilidades, para formar subconjuntos de 2 elementos, tem-se $C_{n,2}$ possibilidades, assim sucessivamente até se chegar ao subconjunto de n elementos, daí tem-se $C_{n,n} = 1$ possibilidade. Então, o número de elementos de $P(X)$ é $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \dots + C_{n,n-1} + C_{n,n} = (1 + 1)^n = 2^n$.
- Exemplo. Seja $X = \{0,1,2\}$, o número de elementos de $P(X)$ é $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Basta notar que o subconjunto sem elemento é $\emptyset$, então temos 1 possibilidade, para o subconjunto com 1 elemento tem-se $\{0\}, \{1\}, \{2\}$, 3 possibilidades, para o subconjunto de 2 elementos, têm-se $\{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}$, 3 possibilidades, por fim temos o subconjunto de X com 3 elementos (o próprio X), $\{0,1,2\}$, 1 possibilidade, fazendo a soma, obtemos o total de elementos de $P(X)$: $1 + 3 + 3 + 1 = 8$.
- Exemplo. Dado $X = \{3,4\}$, o número de elementos de $P(X)$ é $2^2 = 4$.

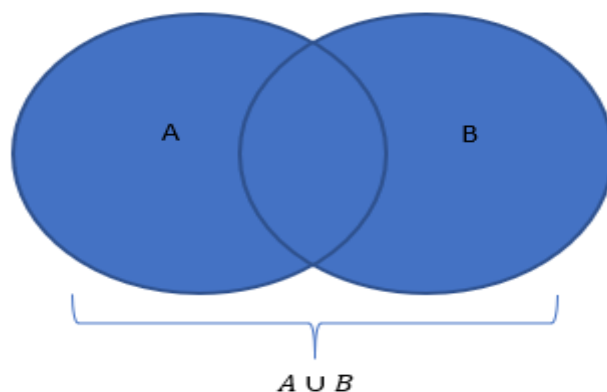
1.5 OPERAÇÕES

1.5.1 União e Intersecção

1.5.1.1 União

A união dos conjuntos A e B é o conjunto $A \cup B$, composto pelos elementos de A mais os elementos de B , portanto dizer que $x \in A \cup B$ quer dizer que pelo menos uma das seguintes sentenças é verdadeira: $x \in A$ ou $x \in B$. Então pode-se escrever: $A \cup B = \{x; x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Contrariamente à linguagem popular, a palavra “ou” é usada em sentido amplo, afirmar que “ $x \in A$ ou $x \in B$ ” quer-se dizer que ao menos uma das alternativas é verdadeira, sem excluir a possibilidade de que ambas sejam, ou seja, de haver simultaneamente $x \in A$ e $x \in B$.



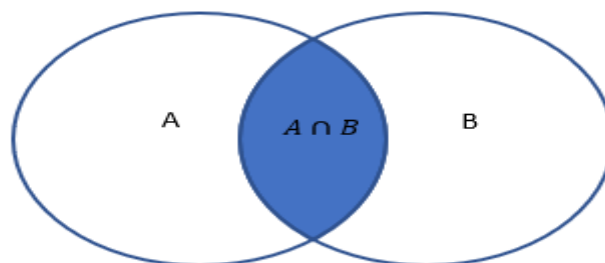
Na figura acima, onde os conjuntos A e B são diagramas, $A \cup B$ é a parte hachurada.

Para quaisquer conjuntos A e B , $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$.

Exemplo. Dados $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,4,6\}$, então $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$, $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$.

1.5.1.2 Interseção

A interseção dos conjuntos A e B é o conjunto $A \cap B$, composto pelos elementos que estão simultaneamente em A e em B , portanto dizer que $x \in A \cap B$, significa dizer que há ao mesmo tempo $x \in A$ e $x \in B$. Escreve-se, portanto: $A \cap B = \{x; x \in A \text{ e } x \in B\}$.

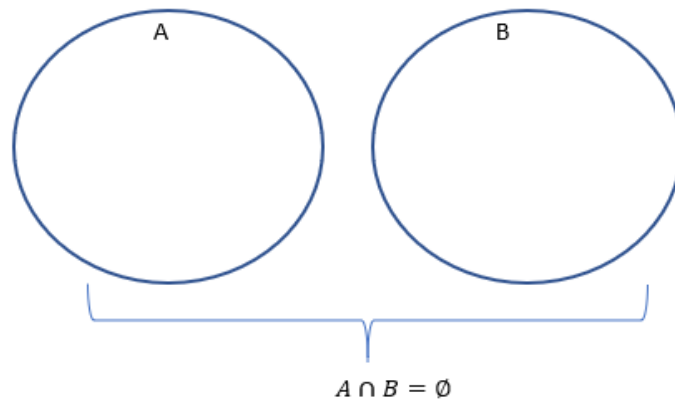


Na figura acima, em que os conjuntos A e B estão representados por diagrama, $A \cap B$ é a parte hachurada.

Para todos os conjuntos A e B , $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$.

Exemplo. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,4,6\}$, então $A \cap B = \{2\}$, $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$.

Pode acontecer de $A \cap B = \emptyset$, nesse caso, A e B são conjuntos disjuntos, veja a figura abaixo:



Conforme a figura acima, é importante notar que dois conjuntos A e B disjuntos não se interceptam.

Exemplo. Dados $A = \{1,3,5\}$ e $B = \{2,4,6\}$, A e B são disjuntos, pois $A \cap B = \emptyset$.

1.5.1.3 União e Interseção

Abaixo estão as principais propriedades envolvendo união e interseção entre conjuntos:

1. Idempotência: $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$;
2. Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$;
3. Associatividade: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
4. Elemento neutro: $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap U = A$;
5. Elemento Absorvente/Dominante: $A \cup U = U$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$;
6. Distributividade: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
7. $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ e $A \cap B = A$.

As propriedades de 1. a 5. são de verificação imediata, as distributividades da propriedade 6) serão demonstradas abaixo:

$$\begin{aligned}
 i) \quad x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \in C) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ e } x \in A \cup C \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ii) \quad x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \in B \text{ ou } x \in C) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ ou } x \in (A \cap C) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
 \end{aligned}$$

Segue abaixo a prova da propriedade 7.:

Para provar $A \cup B = B$ devido a $A \subset B$, é preciso mostrar que $B \subset A \cup B$ e $A \cup B \subset B$, como $B \subset A \cup B$ pela definição da união, desse modo a prova limita-se a demonstrar que $A \cup B \subset B$.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \stackrel{A \subset B}{=} x \in B \Rightarrow A \cup B \subset B$$

Logo $A \cup B = B$.

Para provar que $A \cap B = A$ do fato de $A \subset B$, é necessário mostrar que $A \subset A \cap B$ e $A \cap B \subset A$; pela definição de interseção, $A \cap B \subset A$, assim a prova limita-se a demonstrar que $A \subset A \cap B$. De fato, $A \subset A \cap B$, do contrário:

$$\exists x \in A; x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \Rightarrow B \not\supset A$$

Um absurdo, já que $A \subset B$, assim $A \subset A \cap B$.

Logo, $A \cap B = A$.

Exemplo. Considere $A = \{0,5,8,9\}$, $B = \{0,9,10\}$ e $C = \{5,6,9,12\}$, assim:

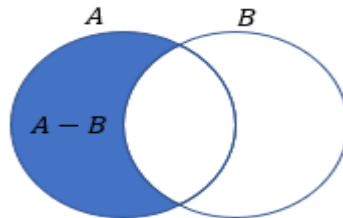
- $B \cap C = \{9\}$, $A \cup B = \{0,5,8,9,10\}$ e $A \cup C = \{0,5,6,8,9,12\}$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0,5,8,9\}$;
- $A \cap B = \{0,9\}$, $A \cap C = \{5,9\}$, $B \cap C = \{9\}$ e $B \cup C = \{0,5,6,9,10,12\}$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{0,5,9\}$.

Exemplo. Considere $A = \{1,4,9\}$ e $B = \{1,4,9,12,17\}$, $A \cup B = \{1,4,9,12,17\} = B$ e $A \cap B = \{1,4,9\} = A$, pois $A \subset B$.

1.5.2 Diferença, Complementar e Diferença Simétrica

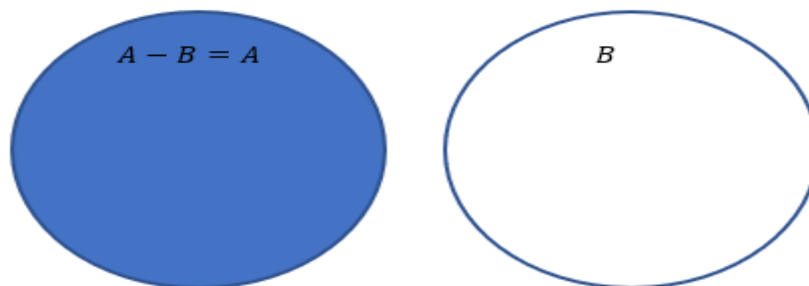
1.5.2.1 Diferença

A diferença de dois conjuntos A e B é o conjunto $A - B$, composto pelos elementos de A que não pertencem a B . $A - B = \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}$.



Na figura acima, em que os conjuntos A e B estão representados por diagramas, a diferença entre A e B é a parte hachurada. O conjunto B não precisa de estar contido no conjunto A para que haja $A - B$.

Se A e B forem disjuntos, $A - B = A$, conforme a parte hachurada da figura abaixo:

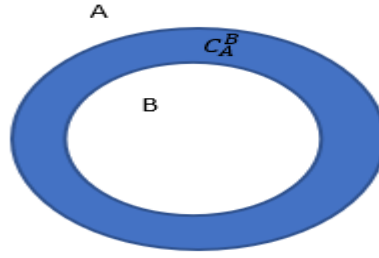


Em qualquer situação, $A - B = A - (A \cap B)$.

- Exemplo. Dados $A = \{3,5,7\}$ e $B = \{5,7,9\}$, $A - B = \{3\}$ e $B - A = \{9\}$.
- Exemplo. Sejam $A = \{7,9,11\}$ e $B = \{8,10,12\}$, $A - B = \{7,9,11\} = A$ e $B - A = \{8,10,12\} = B$, visto que $A \cap B = \emptyset$.

1.5.2.2 Complementar

Quando ocorre $B \subset A$, a diferença $A - B$ é o complementar de B em relação a A que simbolicamente é: $A - B = C_A^B$ ou $C_A B$. A operação complementar só existe quando um conjunto está contido em outro, conforme a figura abaixo:



Na figura acima, C_A^B é a parte hachurada. Como consequência: $x \in C_A^B \Rightarrow x \notin B$. Além disso, dentro da operação complementar, $A - B = A \cap C_A^B$. Evidentemente, $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in C_A^B \Leftrightarrow x \in A \cap C_A^B$.

Exemplo. $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{1,2,3\}$, como $B \subset A$, é definida a operação C_A^B , com $C_A^B = A - B = \{4,5\}$.

Em muitos casos, considera-se o conjunto universo para tratar de complementares. Na maioria dos casos, o conjunto universo considerado é o conjunto $\mathbb{R}$, portanto para $X \subset \mathbb{R}$, para o complementar de X no conjunto $\mathbb{R}$, adota-se uma notação mais simplificada: CX ou $\bar{X}$ ou X^c .

Exemplo. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z}; x \leq 0\} = \mathbb{Z}_-$, o conjunto universo em questão é $\mathbb{Z}$, então $A^c = \{x \in \mathbb{Z} | x > 0\} = \mathbb{Z}_+^*$.

Seguem abaixo as principais propriedades da operação complementar entre conjuntos:

1. $(B^c)^c = B$:

$$x \in (B^c)^c \Leftrightarrow x \notin B^c \Leftrightarrow x \in B$$

2. $B \subset A \Leftrightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$:

$$(\Rightarrow) x \in \bar{A} \Rightarrow x \notin A \xrightarrow{B \subset A} x \notin B \Rightarrow x \in \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$$

$$(\Leftarrow) x \in B \Rightarrow x \notin \bar{B} \xrightarrow{\bar{A} \subset \bar{B}} x \notin \bar{A} \Rightarrow x \in A \Rightarrow B \subset A$$

3. $A = \emptyset \Leftrightarrow \bar{A} = U$:

$$\forall x, x \notin A \Leftrightarrow x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \in U$$

4. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$:

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ e } x \notin B \Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ e } x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$$

5. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$:

$$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ ou } x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$$

É importante observar que o complementar de uma união é uma interseção de complementares e o complementar de uma interseção é uma união de complementares.

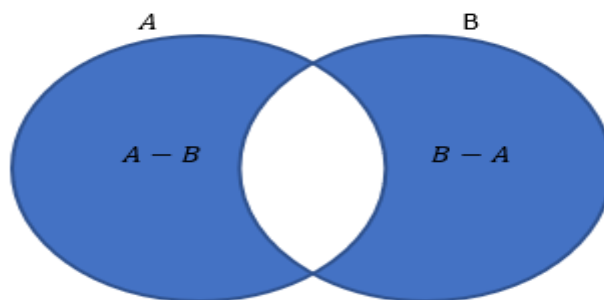
Exemplo. Considere $A = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}; x < 7\}$, desse modo $A^C = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}$, $B^C = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 7\}$ e:

- $(A^C)^C = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} = A$ e $(B^C)^C = \{x \in \mathbb{R}; x < 7\} = B$;
- $A, B \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^C = \emptyset \Rightarrow \mathbb{R}^C \subset A^C$ e $\mathbb{R}^C \subset B^C$;
- $A \cup B = \mathbb{R} \Rightarrow (A \cup B)^C = \emptyset = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}; x \geq 7\} = A^C \cap B^C$;
- $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 7\} \Rightarrow (A \cap B)^C = \{x \in \mathbb{R}; x < 0 \text{ ou } x \geq 7\} = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}; x \geq 7\} = A^C \cup B^C$.

Exemplo. Considere $A = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}; x > 1\}$, $A \subset B$, portanto $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 1\} \subset \{x \in \mathbb{R}; x < 3\}$, isto é, $B^C \subset A^C$.

1.5.2.3 Diferença Simétrica

Para quaisquer conjuntos A e B , define-se a diferença simétrica por $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.



O conjunto $A \Delta B$ é a parte hachurada da figura acima.

Exemplo. Dados $A = \{3,4,5,6,7\}$ e $B = \{6,7,8,9,10\}$, $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{3,4,5\} \cup \{8,9,10\} = \{3,4,5,8,9,10\}$.

Seguem abaixo as propriedades da diferença simétrica:

1. $A \Delta B = B \Delta A$ (Comutatividade):

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$$

2. $A \Delta A = \emptyset$:

$$A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

3. $A \Delta \emptyset = A$ (Elemento Neutro):

4. $A \Delta \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A \cup \emptyset = A$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B):$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) =$$

$$\begin{aligned}
&= [(A \cap \bar{B}) \cup B] \cap [(A \cap \bar{B}) \cup \bar{A}] = \\
&= [(A \cup B) \cap (B \cup \bar{B})] \cap [(A \cup \bar{A}) \cap (\bar{B} \cup \bar{A})] = \\
&= [(A \cup B) \cap U] \cap [U \cap (\bar{B} \cup \bar{A})] = \\
&= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = \\
&= (A \cup B) - (A \cap B)
\end{aligned}$$

Exemplo. Dados $A = \{0,4,5,8,11\}$ e $B = \{-6,-3,8,11\}$, assim $A \cup B = \{-6,-3,0,4,5,8,11\}$, $A \cap B = \{8,11\}$, $A - B = \{0,4,5\}$ e $B - A = \{-6,-3\}$:

a) $A \Delta B = \{0,4,5\} \cup \{-6,-3\} = \{-6,-3\} \cup \{0,4,5\} = B \Delta A$;

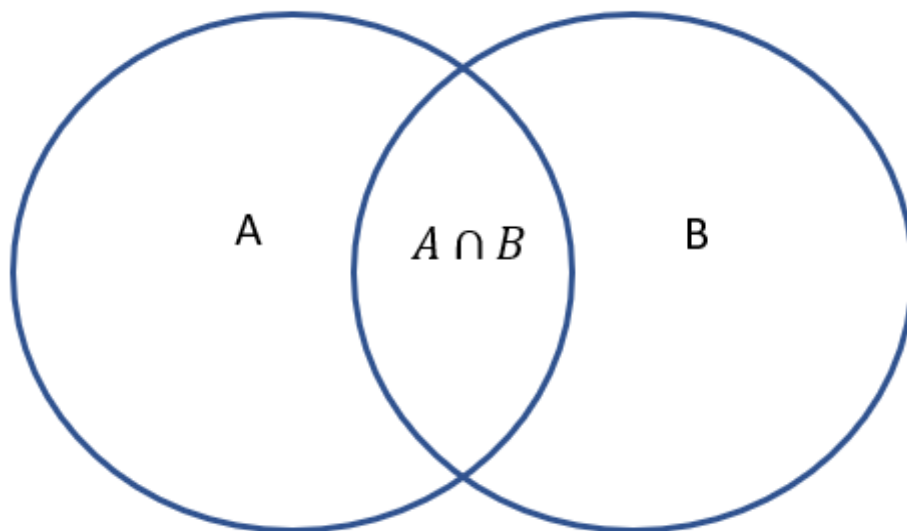
b) $A \Delta B = \{0,4,5\} \cup \{-6,-3\} = \{-6,-3,0,4,5\} = \{-6,-3,0,4,5,8,11\} - \{8,11\} = A \cup B - A \cap B$.

1.6 CARDINALIDADE DA UNIÃO

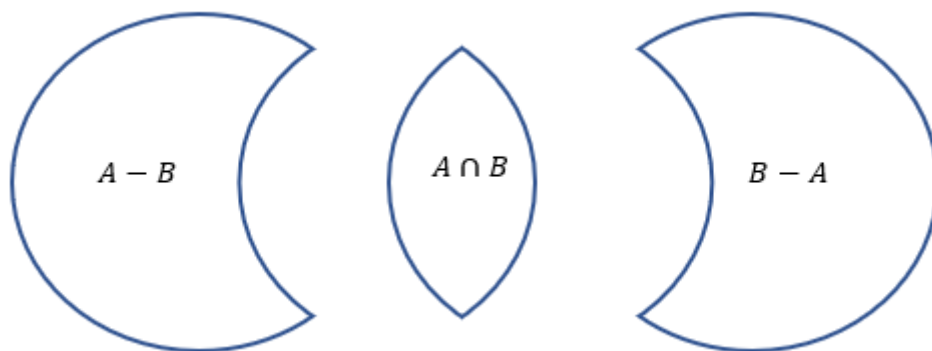
A cardinalidade de um conjunto finito refere-se ao número de elementos desse conjunto. Simbolicamente: $n(A)$ ou $\#A$ ou $\text{card } A$. O conjunto vazio tem cardinalidade zero.

Para quaisquer conjuntos A e B, cardinalidade de $A \cup B$ é: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Prova. Considere os conjuntos A e B abaixo:



Para apurar a cardinalidade de $A \cup B$ de forma mais fácil, convém desmembrar os conjuntos A e B conforme a figura abaixo:



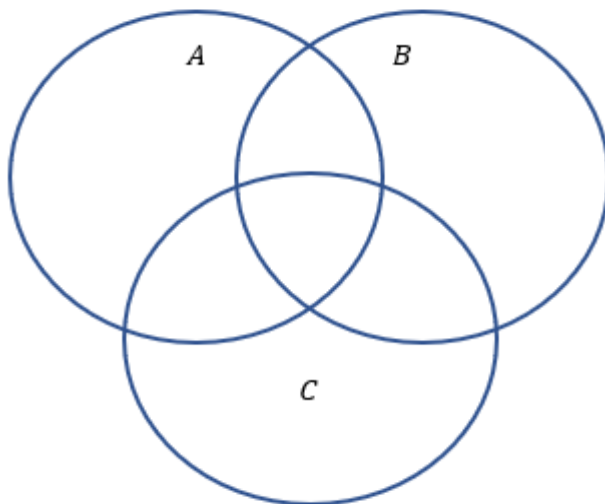
Então:

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B) &= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) = \\
 &= n(A - A \cap B) + n(A \cap B) + n(B - A \cap B) = \\
 &= n(A) - n(A \cap B) + n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) = \\
 &= n(A) + n(B) - n(A \cap B)
 \end{aligned}$$

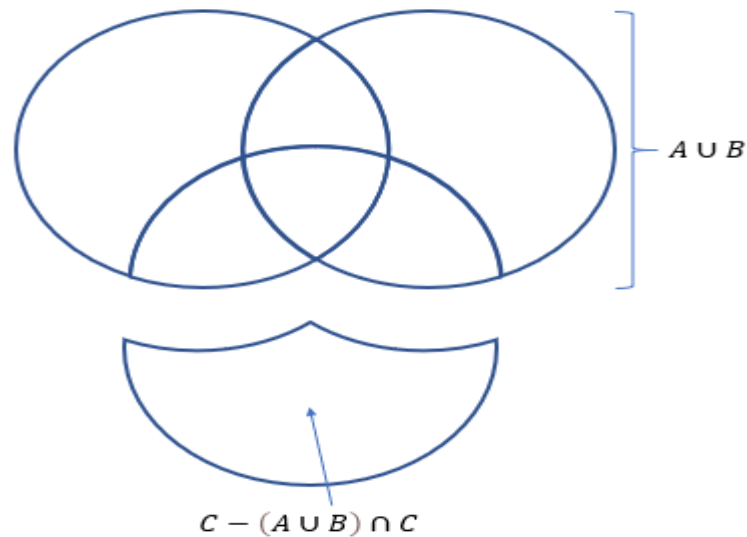
Quando A e B são disjuntos, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, pois $n(A \cap B) = 0$, devido a $A \cap B = \emptyset$.

Para três conjuntos finitos, tem-se: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Prova. Considere os conjuntos A , B e C abaixo:



Para a demonstração, utilizar-se-á $n(A \cup B)$ e o desmembramento de C dos conjuntos A e B , conforme abaixo:



Então:

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B \cup C) &= n(A \cup B) + n[C - (A \cup B) \cap C] = \\
 &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + \{n(C) - n[(A \cup B) \cap C]\} = \\
 &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = \\
 &= n(A) + n(B) + n(C) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)] = \\
 &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)
 \end{aligned}$$

A cardinalidade da união entre conjuntos segue o princípio da Inclusão – Exclusão: em resumo, o número de elementos da união entre os conjuntos é resultado da soma dos elementos de cada conjunto, subtraindo os números de elementos das interseções dois a dois, somando os números de elementos das interseções três a três, subtraindo os números de elementos das interseções quatro a quatro, assim sucessivamente.

Exemplo. Foi feita uma pesquisa com 500 pessoas sobre as marcas de detergente A e B, 258 usam a marca A, 313 usam a marca B. a) Quantas pessoas usam ambas as marcas? b) Quantas pessoas usam somente a marca A? c) Quantas pessoas usam somente a marca B?

Resolução:

- a) $500 = 258 + 313 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 71$
- b) $n(A - B) = 258 - 71 = 187$
- c) $n(B - A) = 313 - 71 = 242$

Exemplo. Em uma escola com 700 alunos, eles têm a opção de participar de 3 clubes: Ciências, Matemática e Robótica. Segue a distribuição das preferências:

268 participam do clube de Ciências

309 participam do clube de Matemática

289 participam do clube de Robótica

91 participam dos clubes de Ciências e Matemática

98 participam dos clubes de Ciências e Robótica

56 participam dos clubes de Ciências, Matemática e Robótica

72 não participam de nenhum dos clubes

a) Quantos alunos participam dos clubes de Matemática e Robótica? b) Quantos alunos participam dos clubes de Matemática ou Robótica? c) Quantos alunos participam apenas do clube de Matemática? d) Quantos alunos participam dos clubes Ciências e Robótica, mas não participam do clube de Matemática? e) Quantos alunos participam dos clubes de Matemática ou Robótica, mas não participam do clube de Ciências?

Resolução.

a) $268 + 309 + 289 - 91 - 98 - n(M \cap R) + 56 + 72 = 700 \Rightarrow n(M \cap R) = 105$

b) $n(M \cup R) = 309 + 289 - 105 = 493$

c) $n[M - (M \cap C) - (M \cap R)] = 309 - 91 - 105 + 56 = 169$

d) $n[(C \cap R) - (C \cap M \cap R)] = 98 - 56 = 42$

e) $n[(M \cup R) - (C \cap M) - (C \cap R)] = 493 - 91 - 98 + 56 = 360$

Exemplo. Um determinado curso com 300 alunos oferta disciplinas obrigatórias e 4 disciplinas optativas A, B, C e D. Segue a distribuição dos alunos matriculados em disciplinas optativas:

63 estão matriculados na optativa A

75 estão matriculados na optativa B

83 estão matriculados na optativa C

91 estão matriculados na optativa D

6 estão matriculados nas optativas A e B

8 estão matriculados nas optativas A e C

10 estão matriculados nas optativas A e D

12 estão matriculados nas optativas B e C

14 estão matriculados nas optativas B e D

16 estão matriculados nas optativas C e D

7 estão matriculados nas optativas A, B e C

9 estão matriculados nas optativas A, B e D

11 estão matriculados nas optativas A, C e D

13 estão matriculados nas optativas B, C e D

4 estão matriculados nas 4 disciplinas optativas

a) Quantos alunos estão matriculados em pelo menos uma disciplina? b) Qual o percentual de alunos que não estão matriculados em nenhuma disciplina? c) A maioria dos alunos estão cursando ao menos 3 disciplinas? d) Quantos alunos estão matriculados em exatamente 3 disciplinas? e) Quantos alunos estão matriculados em no máximo 3 disciplinas?

Resolução.

$$a) n(A \cup B \cup C \cup D) = 63 + 75 + 83 + 91 - 6 - 8 - 10 - 12 - 14 - 16 + 7 + 9 + 11 + 13 - 4 = 282$$

$$b) T - n(A \cup B \cup C \cup D) = 300 - 282 = 18 \Rightarrow p = \frac{18}{300} = 6\%$$

$$c) n[(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) \cup (A \cap C \cap D) \cup (B \cap C \cap D)] = 7 + 9 + 11 + 13 - 4 \cdot 4 + 4 = 28 \Rightarrow \text{não}$$

$$d) n[(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) \cup (A \cap C \cap D) \cup (B \cap C \cap D)] - n(A \cap B \cap C \cap D) = 28 - 4 = 24$$

$$e) T - n(A \cap B \cap C \cap D) = 300 - 4 = 296$$

1.7 PAR ORDENADO E PRODUTO CARTESIANO

A operação de produto cartesiano é baseada no conceito de par ordenado.

1.7.1 Par Ordenado

Sejam dois objetos a e b , o par ordenado fica definido quando escolhemos um deles (digamos a) para ser a primeira coordenada e por conseguinte, o objeto b para ser a segunda coordenada desse par. Dois pares ordenados (a, b) e (a', b') são iguais quando as coordenadas correspondentes de cada par são iguais, isto é: $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{ e } b = b'$. Deve-se ficar atento que par ordenado (a, b) é diferente do conjunto $\{a, b\}$. De fato, $\{a, b\} = \{b, a\}$, ao contrário de par ordenado, dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos, ainda que os elementos não estejam na mesma ordem. Mas dentro de par ordenado só ocorre $(a, b) = (b, a)$ quando $a = b$.

Exemplo. Os conjuntos $\{2, 3\} = \{3, 2\}$, mas os pares ordenados $(2, 3) \neq (3, 2)$.

Exemplo. Em sistemas de equações, nota-se a importância de par ordenado:

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

O par ordenado $(8,2)$ é solução do sistema, mas o par ordenado $(2,8)$ não.

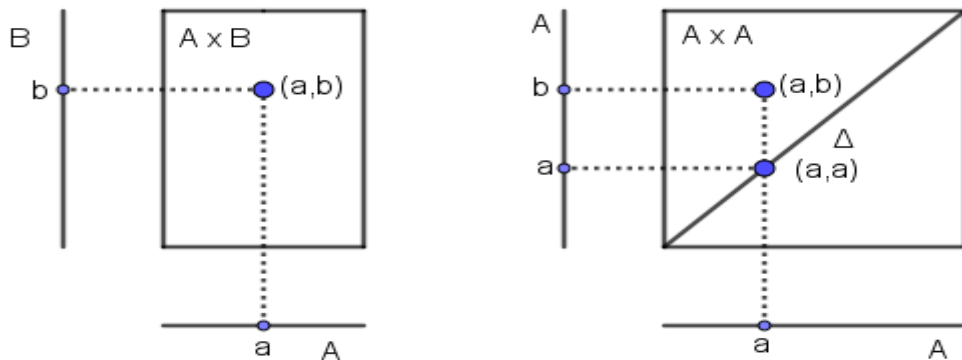
1.7.2 Produto Cartesiano

O produto cartesiano de dois conjuntos quaisquer A e B é o conjunto $A \times B$ em que seus elementos são os pares ordenados (a,b) com a primeira coordenada (a) sendo elemento de A e a segunda coordenada (b) sendo elemento de B . Assim:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Quando $A = B$, tem-se $A \times B = A \times A = A^2$. O subconjunto $\Delta \subset A \times A$ é o subconjunto do produto cartesiano composto pelos pares ordenados (a,a) de coordenadas iguais, denominado diagonal de $A \times A$.

Quando $A \neq B$, os conjuntos A e B representam segmentos e o produto cartesiano $A \times B$ representa, conseqüentemente, um retângulo, conforme a figura esquerda abaixo; na figura abaixo, à direita, $A = B$, então o produto cartesiano $A^2 = A \times A$, representa um quadrado onde se destaca o subconjunto Δ (*diagonal*).



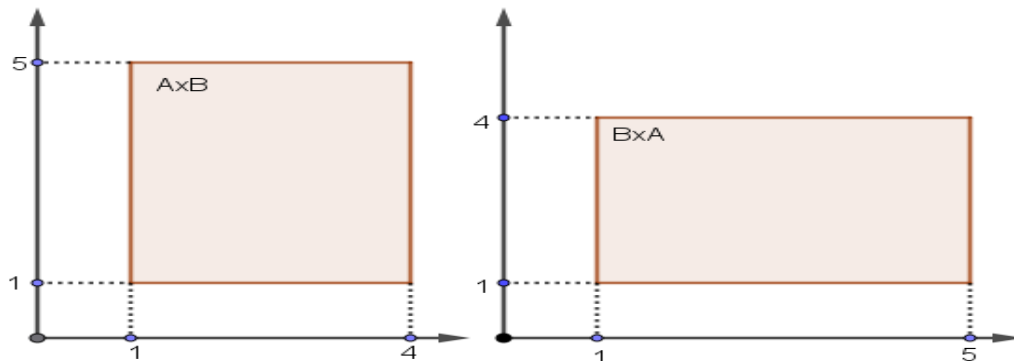
Exemplo. Dados $A = \{3,6,9\}$ e $B = \{c,f,i\}$, $A \times B = \{(3,c), (3,f), (3,i), (6,c), (6,f), (6,i), (9,c), (9,f), (9,i)\}$.

Exemplo. Seja $C = \{x,y\}$, $C^2 = C \times C = \{(x,x), (x,y), (y,x), (y,y)\}$ e $\Delta = \{(x,x), (y,y)\} \subset C^2$.

O produto cartesiano $A \times B$ não é comutativo, ou seja, quase sempre $A \times B \neq B \times A$.

Exemplo. Dados $A = \{2,5,8\}$ e $B = \{6,9\}$, $A \times B = \{(2,6), (2,9), (5,6), (5,9), (8,6), (8,9)\}$ e $B \times A = \{(6,2), (6,5), (6,8), (9,2), (9,5), (9,8)\}$, assim $A \times B \neq B \times A$.

Exemplo. Dados $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 5\}$, segue abaixo a representação gráfica de $A \times B$ e $B \times A$, a partir dela, nota-se a diferença entre $A \times B$ e $B \times A$ no caso apontado neste exemplo:



A seguir, estão listadas algumas propriedades relevantes do produto cartesiano.

1. O produto cartesiano $A \times B$ não é comutativo, quer dizer, $A \times B \neq B \times A$, a igualdade só ocorre se, e somente se, $A = B$:

Se $A \times B = B \times A$, então, para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$, $(a, b) \in A \times B$ e $(a, b) \in B \times A$, logo, $A \subset B$ e $B \subset A$, assim $A = B$. Reciprocamente, se $A = B$, então, $A \times B = B \times A = A \times A = A^2$.

2. Se A e B são conjuntos finitos, $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$:

Considere os conjuntos A e B , com cardinalidade $n(A)$ e $n(B)$, respectivamente, para formar cada par ordenado de $A \times B$, toma-se os elementos de A para a primeira coordenada e os elementos de B para a segunda coordenada, logo tem-se $n(A)$ possibilidades para a primeira coordenada e $n(B)$ possibilidades para a segunda coordenada, portanto, pelo princípio multiplicativo da contagem, há $n(A) \cdot n(B)$ possibilidades para formar os pares ordenados de $A \times B$. Observação: embora o produto cartesiano não seja comutativo, $n(A \times B) = n(B \times A)$, pois $n(A) \cdot n(B) = n(B) \cdot n(A)$.

3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ para todos A , B e C (Distributividade em relação à união):

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } y \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \text{ e } (y \in B \text{ ou } y \in C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } y \in C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \text{ ou } (x, y) \in A \times C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (Distributividade em relação à interseção):

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } y \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \text{ e } (y \in B \text{ e } y \in C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ e } (x \in A \text{ e } y \in C) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \text{ e } (x, y) \in A \times C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)
\end{aligned}$$

5. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ (Distributividade em relação à diferença):

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B - C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } y \in B - C \Leftrightarrow x \in A \text{ e } (y \in B \text{ e } y \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ e } (x \in A \text{ e } y \notin C) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \text{ e } (x, y) \notin A \times C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) - (A \times C)
\end{aligned}$$

6. Se $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$, então $A \times B = \emptyset$:

Com efeito, como os conjuntos A e B são vazios, não possuem elementos para a formação de pares ordenados, portanto $A \times B = \emptyset$. Outra forma de constatar isso é analisando a cardinalidade de A e B que é zero, logo $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 0 \cdot 0 = 0$, conseqüentemente, $A \times B = \emptyset$.

7. Se $A \times B = \emptyset$, então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$:

Se tivéssemos $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, $\exists x \in A$ e $\exists y \in B$ de modo que $A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\} \neq \emptyset$, um absurdo, logo pelo menos um dos conjuntos A e B são vazios, isto é, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. Outra maneira de demonstrar é analisando a cardinalidade de A e B por conta de $A \times B = \emptyset$, daí tem-se: $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow n(A \times B) = 0 \Leftrightarrow n(A) = 0 \text{ ou } n(B) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$.

Exemplo. Considere $A = \{3\}$, $B = \{3, 6\}$ e $C = \{3, 6, 9\}$;

$$a) n(B \times C) = n(B) \cdot n(C) = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = n(C) \cdot n(B) = n(C \times B)$$

$$b) A \times (B \cup C) = \{3\} \times \{3, 6, 9\} = \{(3, 3), (3, 6), (3, 9)\} = \{(3, 3), (3, 6)\} \cup \{(3, 3), (3, 6), (3, 9)\} = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$c) A \times (B \cap C) = \{3\} \times \{3, 6\} = \{(3, 3), (3, 6)\} = \{(3, 3), (3, 6)\} \cap \{(3, 3), (3, 6), (3, 9)\} = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$d) A \times (C - B) = \{3\} \times \{9\} = \{(3, 9)\} = \{(3, 3), (3, 6), (3, 9)\} - \{(3, 3), (3, 6)\} = (A \times C) - (A \times B)$$

CAPÍTULO 2: CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1 NÚMEROS NATURAIS

O conjunto dos números naturais é:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado para as operações algébricas de adição e multiplicação, isto é: a soma de dois números naturais resulta em um número natural e o produto de números naturais resulta em número natural. Dentro dos naturais, há o subconjunto $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, naturais não nulos, subconjunto fundamental para o processo de contagem e o estudo de variáveis discretas.

Seguem as propriedades operatórias da adição e da multiplicação:

1. Associativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
2. Comutativa: $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$;
3. Elemento neutro: $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$;
4. Distributiva: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Contudo, o conjunto $\mathbb{N}$ não é fechado para as operações algébricas de subtração e divisão, pois nem sempre a subtração de dois naturais resulta em um número natural e nem sempre a divisão de dois naturais resulta em um número natural.

2.2 NÚMEROS INTEIROS

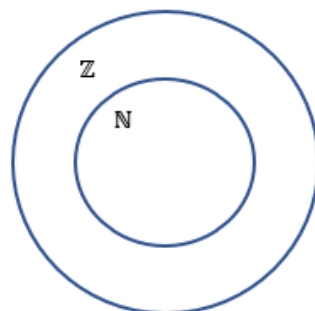
O conjunto dos números inteiros é:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

O conjunto é formado pelos naturais e os simétricos dos naturais não nulos, assim:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cup \{\dots, -3, -2, -1\}$$

Portanto, tem-se: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.



2.2.1 Subconjuntos Notáveis

Inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -2, -1, 1, 2, \dots\}$

Inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$

Inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$

Inteiros positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

Inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$

2.2.2 Subtração

O conjunto $\mathbb{Z}$, além de ser fechado para as operações de adição e multiplicação, é fechado para a subtração, pois a diferença de dois inteiros sempre resulta num inteiro.

1. Propriedade do elemento simétrico: $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists! x' \in \mathbb{Z}$ tal que $x + x' = 0$.

Consequentemente:

$$x + (-x) = 0 \Leftrightarrow x - x = 0$$

$$a - b \Leftrightarrow a + (-b)$$

Propriedades decorrentes:

- 1ª Lei do corte: $x + y = x + z \Leftrightarrow y = z$
 $x + y = x + z \Leftrightarrow (-x) + x + y = (-x) + x + z \Leftrightarrow (x - x) + y = (x - x) + z$
 $\Leftrightarrow 0 + y = 0 + z \Leftrightarrow y = z$
- Jogo de sinais: $\forall x \in \mathbb{Z}, x = -(-x)$
 $x + (-x) = 0 \Rightarrow x + (-x) - (-x) = 0 - (-x) \Rightarrow x = -(-x)$
- Unicidade do elemento neutro:
 $a \in \mathbb{Z}; x + a = x \Rightarrow (-x) + x + a = (-x) + x \Rightarrow 0 + a = 0 \Rightarrow a = 0$
- Multiplicação por zero: $x \cdot 0 = 0$
 $x = x \cdot (0 + 1) = x \cdot 0 + x \cdot 1 = x \cdot 0 + x \Rightarrow x \cdot 0 + x + (-x) = x + (-x)$
 $\Rightarrow x \cdot 0 = 0$

O conjunto $\mathbb{Z}$ não é fechado para a operação de divisão, pois nem sempre a divisão de dois inteiros resulta em um inteiro.

2.3 NÚMEROS RACIONAIS

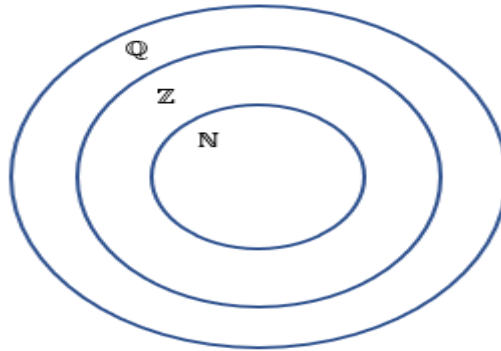
O conjunto dos números racionais é:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$p \rightarrow \text{numerador}$

$q \rightarrow \text{denominador}$

Para $q = 1$, conclui-se que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, sendo assim, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



2.3.1 Operações em $\mathbb{Q}$

O conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado para as operações de adição, subtração e multiplicação de divisão (denominador não nulo).

Dados $a, c \in \mathbb{Q}$ e $b, d \in \mathbb{Q}^*$:

$$I. \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$II. \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$III. \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$IV. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$V. \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \text{ com } c \neq 0$$

Exemplos:

$$I. \frac{5}{4} = \frac{20}{16} \rightarrow 5 \cdot 16 = 20 \cdot 4 = 80$$

$$II. \frac{2}{7} + \frac{3}{11} = \frac{2 \cdot 11 + 3 \cdot 7}{7 \cdot 11} = \frac{43}{77}$$

$$III. \frac{2}{7} - \frac{3}{11} = \frac{2 \cdot 11 - 3 \cdot 7}{7 \cdot 11} = \frac{1}{77}$$

$$IV. \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{11} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 11} = \frac{6}{77}$$

$$V. \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{11}} = \frac{2}{7} \cdot \frac{11}{3} = \frac{22}{21}$$

Propriedade do elemento inverso: $\forall x \in \mathbb{Q}^*, \exists! x' \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot x' = 1$.

Consequentemente:

$$q^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{q}$$
$$\frac{p}{q} \Leftrightarrow p \cdot q^{-1}$$

Propriedades decorrentes:

- Corte Multiplicativo (2^a Lei do corte): $x \cdot y = x \cdot z \Leftrightarrow y = z, x \neq 0$
- $x \cdot y = x \cdot z \Leftrightarrow (x^{-1}) \cdot x \cdot y = (x^{-1}) \cdot x \cdot z \Leftrightarrow 1 \cdot y = 1 \cdot z \Leftrightarrow y = z$
- Unicidade do elemento neutro multiplicativo: $\exists u \in \mathbb{Q}; \forall x \in \mathbb{Q}, x \cdot u = x$

$$\text{Para } x \neq 0, x \cdot u = x \Leftrightarrow x^{-1} \cdot x \cdot u = x \cdot x^{-1} \Rightarrow 1 \cdot u = 1 \Leftrightarrow u = 1$$

Exemplo. Nunca caia na tentação de resolver equação da forma $ax^2 + bx = 0$ assim:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow \frac{ax^2}{x} + \frac{bx}{x} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Pois zero também é solução.

Resolva assim:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x \cdot (ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}$$

2.3.2 Fração Irredutível

É a fração de inteiros a / b quando $MDC(a, b) = 1$ e $b \neq 0$. Todo racional pode ser escrito de forma única sob a forma de fração irredutível quando:

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \exists! (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+^*; r = \frac{a}{b} \text{ e } MDC(a, b) = 1$$

Dois inteiros são primos entre si se, e somente se, o MDC entre eles é igual a 1.

Exemplos:

$$I. \frac{25}{5} = \frac{25^{5:5}}{5^{5:5}} = \frac{5}{1} = 5$$
$$II. \frac{916}{328} = \frac{916^{4:4}}{328^{4:4}} = \frac{229}{82}$$
$$III. \frac{3060}{3485} = \frac{3060^{85:85}}{3485^{85:85}} = \frac{36}{41}$$

$$IV. \frac{516}{972} = \frac{516^{12}}{972^{12}} = \frac{43}{81}$$

2.3.3 Representação Decimal

A expressão $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, é a representação decimal do número real a onde a_0 é a parte inteira e a sequência de algarismos $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ compõe a parte decimal sendo $a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. O dígito a_n é o n -ésimo dígito da representação decimal de a , para $n \in \mathbb{N}^*$ e $0 \leq a_n \leq 9$.

Exemplo. 15,246 e 3,865757 ... são exemplos de expressões decimais, 15 e 3 são as partes inteiras de 15,246 e 3,865757 ..., respectivamente. O número na representação por $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ pode ser escrito na forma a seguir:

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

Assim:

$$15,246 = 15 + \frac{2}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{6}{10^3}$$

$$3,865757 \dots = 3 + \frac{8}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \dots$$

Na Matemática, é adotado o sistema de numeração decimal, quer dizer, usa-se os algarismos de 0 a 9 para formar todos os números. O valor de cada algarismo dentro do número depende da posição que ele ocupa dentro dele. O valor do algarismo cresce conforme a posição que ele ocupa da direita para a esquerda, então se o algarismo anda para a posição imediatamente à direita, o seu valor é 10 vezes menor, enquanto o seu valor se torna dez vezes maior, quando ele se desloca para a posição imediatamente à esquerda. A partir da educação básica, um estudante já aprende que o valor do algarismo em número cresce da direita para a esquerda antes e depois da vírgula, antes da vírgula, para a formação da parte inteira, começa na unidade (10^0), depois na dezena (10^1), depois na centena (10^2), depois no milhar (10^3), assim sucessivamente; depois da vírgula, para a formação da parte decimal, o algarismo fica cada vez menor à medida que se posiciona cada vez mais à direita da vírgula, iniciando em $10^{-1} \left(\frac{1}{10}\right)$, depois $10^{-2} \left(\frac{1}{10^2}\right)$, depois $10^{-3} \left(\frac{1}{10^3}\right)$, depois $10^{-4} \left(\frac{1}{10^4}\right)$, assim sucessivamente.

Exemplo. Os números 12217 e 18,524 podem ser escritos na seguinte forma:
 $12217 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$ e $18,524 = 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + \frac{5}{10^1} + \frac{2}{10^2} + \frac{4}{10^3}$.

Apesar de 12217 poder ser escrito na forma 12217,000 ... , por convenção, a vírgula e a parte decimal, que é toda composta por zeros, são omitidas, isso acontece com qualquer número inteiro. Já no caso do número 18,524, a vírgula é necessária, porque existem algarismos distintos de zero após a vírgula que precisam de ser diferenciados da parte inteira, assim como acontece nos números $0,008 = 0 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}$ e $507,0109 = 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-4}$.

No sistema decimal de numeração, todo número racional é decimal exato ou dízima periódica.

2.3.3.1 Decimal Exato

Um número decimal exato é aquele que resultante da divisão entre dois inteiros, resulta em outro inteiro ou em número decimal com número finito de casas depois da vírgula. Exemplos. Veja abaixo o resultado da divisão de 625 por 5, de 167 por 20 e 5,7 por 2:

$$\begin{array}{r} 625 \quad | \quad 5 \\ 0 \quad 125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 167 \quad | \quad 20 \\ 0 \quad 8,35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5,7 \quad | \quad 2 \\ 57 \quad | \quad 20 \\ 0 \quad 2,85 \end{array}$$

Então $\frac{625}{5} = 125$, $\frac{167}{20} = 8,35$ e $\frac{5,7}{2} = 2,85$, no caso da divisão de 625 por 5, tem como resultado um número inteiro e por isso, a vírgula é implícita, mas para o resultado da divisão de 167 por 20 e de 5,7 por 2, utiliza-se obrigatoriamente a vírgula, pois há algarismos não nulos após ela.

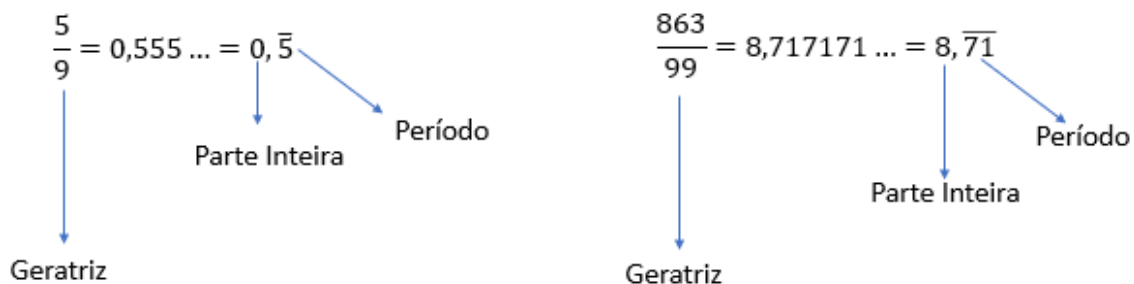
2.3.3.2 Dízimas Periódicas

2.3.3.2.1 Conceito

Dízima periódica é o número cuja representação decimal possui infinitos algarismos repetidos periodicamente após a vírgula. A fração que origina a dízima periódica é denominada geratriz. A parte que se repete na dízima periódica é denominada período.

2.3.3.2 Dízima Periódica Simples

Uma dízima periódica simples é aquela formada somente pela parte inteira e pela parte que se repete indefinidamente após a vírgula. Exemplo. Através deste exemplo, vê-se os componentes de uma dízima periódica simples:



Veja como obter a fração geratriz de dízima periódica simples a partir dos exemplos a seguir.

Exemplos:

a) $0, \overline{1534}$

1ª forma. Primeiro a dízima periódica é multiplicada por 10^n , em que n corresponde ao número de algarismos do período (parte que se repete), depois subtrai-se o resultado do valor da dízima:

$$x = 0,1534 \dots \times 10^4 \rightarrow \text{o período tem quatro algarismos, os dígitos 1,5,3 e 4, nessa ordem}$$

$$-x = -0,1534 \dots$$

$$\hline 9999x = 1534$$

$$x = \frac{1534}{9999}$$

2ª forma. Outra maneira de encontrar a fração geratriz é dividir os dígitos do período, que são 1,5,3 e 4, nessa ordem, pelo número que é formado pela quantidade de algarismos 9 equivalente à quantidade de dígitos do período, nesse caso, o denominador vai ter quatro algarismos 9, assim:

$$0, \overline{1534} = \frac{1534}{9999}$$

b) $13, \overline{26478}$

1ª forma. Multiplica-se a dízima periódica por 10^5 , depois subtrai-se o resultado do valor da dízima periódica:

$$\begin{aligned}
 x &= 13,26478 \dots \times 10^5 \\
 -x &= -13,26478 \dots \\
 \hline
 99999x &= 1326425 \\
 x &= \frac{1326425}{99999} = \frac{147385}{11111}
 \end{aligned}$$

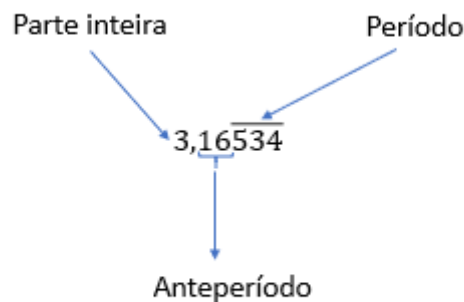
2ª forma. Quando a parte inteira da dízima periódica simples é não nula, o numerador é resultante da diferença entre o número formado pela união da parte inteira com os algarismos do período e a própria parte inteira, o denominador será composto por tantos algarismos 9 quantos forem os dígitos do período:

$$13,\overline{26478} = \frac{1326478 - 13}{99999} = \frac{1326465}{99999} = \frac{147385}{11111}$$

2.3.3.2.3 Dízima Periódica Composta

É a dízima periódica composta pela parte inteira, parte decimal não periódica (anteperíodo) e pelo período.

Exemplo. Abaixo se mostram os componentes da dízima composta $3,16\overline{534}$:



Veja como obter a geratriz de uma dízima periódica composta a partir do exemplo a seguir.

Exemplo. Obtenha a geratriz dos números decimais $0,002\overline{17}$ e $3,472\overline{555}$:

a) $0,002\overline{17}$

1ª forma. Multiplicar a dízima por 10^n , onde n é a quantidade de algarismos do anteperíodo, depois multiplica-se esse resultado por 10^p , em que p é a quantidade de dígitos da parte periódica, depois subtrair este último resultado do resultado anterior:

$$0,00\overline{217} \times 10^2 = 0,2\overline{17} \rightarrow \text{a parte não periódica tem dois algarismos}$$

$$0,2\overline{17} \times 10^3 = 217,2\overline{17} \rightarrow \text{a parte periódica tem três algarismos}$$

$$100000x = 217,2\overline{17}$$

$$-100x = -0,2\overline{17}$$

$$\hline 99900x = 217$$

$$x = \frac{217}{99900}$$

2ª forma. Forma-se o numerador pela diferença entre o número formado pela junção do anteperíodo com o período e o número formado pelos algarismos do anteperíodo e o denominador é formado pela quantidade de 9 equivalente à quantidade de algarismos do período seguido de tantos 0 quantos forem a quantidade de dígitos do anteperíodo:

$$0,002\overline{17} = \frac{217}{99900}$$

b) $3,472\overline{555}$

1ª forma. Multiplicar a dízima por 10^3 , depois multiplicar esse resultado por 10^3 , e por fim subtrair este último resultado do anterior e o denominador é formado pela quantidade de 9 equivalente à quantidade de algarismos do período seguido de tantos 0 quantos forem a quantidade de dígitos da parte não periódica:

$$3,472\overline{555} \times 10^3 = 3,475\overline{18} \rightarrow \text{a parte não periódica tem três algarismos}$$

$$3472,5\overline{55} \times 10^3 = 3472518,5\overline{18} \rightarrow \text{a parte periódica tem três algarismos}$$

$$1000000x = 3472518,5\overline{18}$$

$$-1000x = -3472,5\overline{18}$$

$$\hline 999000x = 3469046$$

$$x = \frac{3469046}{999000} = \frac{46879}{13500}$$

2ª forma. Como a parte inteira é diferente de zero nesse caso, forma-se o numerador pela diferença entre o número formado pela parte inteira, parte não periódica e período e o número formado pela parte não periódica e o período e o denominador é formado pela quantidade de 9 equivalente à quantidade de algarismos do período seguido de tantos 0 quantos forem a quantidade de dígitos da parte não periódica:

$$3,472\overline{518} = \frac{3472518 - 3472}{999000} = \frac{3469046}{999000} = \frac{46879}{13500}$$

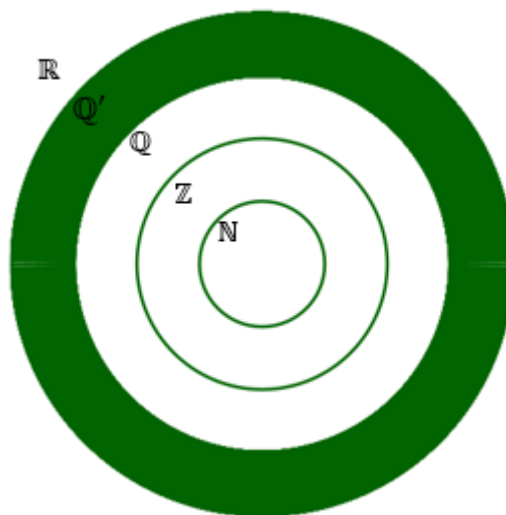
2.4 NÚMEROS REAIS

2.4.1 Dízimas Não – Periódicas

Existem expressões decimais $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ que nem são finitas nem periódicas, ou seja, não podem ser escritas como fração de inteiros. Matematicamente falando: $\nexists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \text{ tal que } \frac{p}{q} = a$. Logo: $a \notin \mathbb{Q}$.

2.4.2 Números Irracionais

O conjunto dos números irracionais é aquele que contém números que não podem ser expressos por uma fração de inteiros: $\mathbb{Q}'$. O conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é resultante da união entre os racionais e irracionais, portanto: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$, sendo $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.



Dessa maneira, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. A parte pintada engloba os números irracionais, que são os números reais que não são racionais, quer dizer, o complementar de $\mathbb{Q}$ no conjunto $\mathbb{R}$.

Finalmente, entre os conjuntos numéricos, também existe o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, que não é tratado neste livro, mas tem-se $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Exemplo. $\sqrt{7}$ é irracional.

Prova. $\sqrt{7}$ é irracional, pois do contrário, haveria inteiros p e q , primos entre si, tal que

$$\frac{p}{q} = \sqrt{7} \Leftrightarrow p = \sqrt{7}q \Leftrightarrow p^2 = 7q^2$$

um absurdo, já que na fatoração em primos, quando se decompõe um quadrado perfeito, todos os fatores primos aparecem elevados a expoentes pares, portanto o fator 7 tem expoente par em p^2 , porém tem expoente ímpar em $7q^2$, a igualdade não é possível, pois pelo Teorema Fundamental da Aritmética, um número natural é decomposto de modo

único em fatores primos, logo $\sqrt{7}$ é irracional. Outra maneira de comprovar que $\sqrt{7}$ é irracional é supondo, por absurdo, que existem inteiros p e q , primos entre si, de maneira que $\frac{p}{q} = \sqrt{7}$, logo $\frac{p^2}{q^2} = 7 \Leftrightarrow p^2 = 7q^2$, conclui-se que p^2 é múltiplo de 7, então p é múltiplo de 7, tomando $p = 7k$, para $k \in \mathbb{Z}$, daí, haveria $p^2 = (7k)^2 \Leftrightarrow p^2 = 49k^2$, daí infere-se que q^2 também é múltiplo de 7, o que se conclui que q também é múltiplo de 7, um absurdo, já que $MDC(p, q) = 1$, pela hipótese.

Do exemplo anterior, conclui-se que $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$, entre outros, também são números irracionais.

Exemplo. O número $\pi = 3,141592 \dots$, muito utilizado na geometria, é irracional.

Para $m, n \in \mathbb{N}$, se $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$, então $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{Q}$.

Prova. Vamos supor, por absurdo, que $\left(\frac{p}{q}\right)^n = m$, com inteiros p e q primos entre si, logo $p^n = q^n m$ e, por conseguinte, q^n é divisor de p^n , como $MDC(p, q) = 1 \Rightarrow MDC(p^n, q^n) = 1$, a única maneira de q^n ser divisor de p^n é para $q = 1$. Se $q = 1$, $p = \sqrt[n]{m}$, o que contradiz a hipótese de $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$. Em resumo, para $m, n \in \mathbb{N}$, se $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$, então $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}'$.

Exemplo. Os números $\sqrt{11}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{57}, \sqrt[4]{13}$ e $\sqrt[5]{24}$ também são irracionais.

Se $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}'$, então $a + b \in \mathbb{Q}'$ e $a - b \in \mathbb{Q}'$.

Prova.

- Suponha que $a + b = c_1 \in \mathbb{Q}$, haveria $b = c_1 - a \in \mathbb{Q}$, um absurdo, logo $a + b \in \mathbb{Q}'$;
- Suponha que $a - b = c_2 \in \mathbb{Q}$, haveria $b = a - c_2 \in \mathbb{Q}$, um absurdo, logo $a - b \in \mathbb{Q}'$.

Se $a \in \mathbb{Q}^*$ e $b \in \mathbb{Q}'$, então $a \cdot b \in \mathbb{Q}'$ e $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}'$.

- Suponha que $a \cdot b = c_3 \in \mathbb{Q}$, haveria $b = \frac{c_3}{a} \in \mathbb{Q}$, um absurdo, logo $a \cdot b \in \mathbb{Q}'$;
- Suponha que $\frac{a}{b} = c_4 \in \mathbb{Q}$ ($c_4 \neq 0$), haveria $b = \frac{a}{c_4} \in \mathbb{Q}$, um absurdo, logo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}'$.

Exemplo. $3 \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$, então $3 + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$, $3 - \sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$, $3\sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$ e $\frac{3}{\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}'$.

Observação: o conjunto $\mathbb{Q}'$ não é fechado para nenhuma das quatro operações algébricas, pois a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão de números irracionais nem sempre resultam em um número irracional:

- a) $(2 + \sqrt{7}) + (2 - \sqrt{7}) = 4 \in \mathbb{Q}$;
- b) $(2 + \sqrt{7}) - \sqrt{7} = 2 \in \mathbb{Q}$;
- c) $(2 + \sqrt{7}) \cdot (2 - \sqrt{7}) = 4 - 7 = -3 \in \mathbb{Q}$;
- d) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 1 \in \mathbb{Q}$.

2.4.3 Operações em Números Reais

O conjunto $\mathbb{R}$ é fechado para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Lembrando que a divisão só ocorre com denominador não nulo.

Em $\mathbb{R}$, as operações de adição e multiplicação satisfazem a todas as propriedades já mostradas. A subtração e divisão são operações que derivam da adição e multiplicação, a operação de subtração sempre é definida em $\mathbb{R}$ sem restrições e a divisão se define em $\mathbb{R}$ quando o divisor é não nulo.

2.4.4 Relação de Ordem

No conjunto $\mathbb{R}$, destacam-se os subconjuntos $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ e $\{0\}$ e é chamado de corpo ordenado, pois as seguintes condições são satisfeitas:

- 1) Se $x, y \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}_+^*$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}_+^*$;
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+^*$ ou $x \in \mathbb{R}_-^*$ ou $x = 0$.

Das condições acima, conclui-se que a soma e o produto de dois números reais positivos sempre resultam em reais positivos, ademais, para todo número em $\mathbb{R}$, há três possibilidades: 1) ser positivo; 2) ser negativo; 3) ou ser nulo. Os conjuntos $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ e $\{0\}$ são dois a dois disjuntos, com $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* \cup \{0\}$. Num corpo ordenado $\mathbb{R}$, se $a \in \mathbb{R}_+^*$, então $a^2 > 0$. De fato, se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \cdot a = a^2 \in \mathbb{R}_+^*$, se $a \in \mathbb{R}_-^*$, então $-a \in \mathbb{R}_+^*$, segue que $(-a) \cdot (-a) = a^2 \in \mathbb{R}_+^*$. Num corpo ordenado, o quadrado de qualquer número não nulo é sempre positivo. Não existe número negativo que seja quadrado de algum número em $\mathbb{R}$.

Exemplo. Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$.

Quando se tem $x < y$, significa que x é menor que y , dessa forma $y - x \in \mathbb{R}_+^*$, quer dizer $y = x + z$, com $z \in \mathbb{R}_+^*$. Afirmar que $x < y \Leftrightarrow y > x$. Se $x > 0$, logo $x \in \mathbb{R}_+^*$, enquanto se $x < 0$, $x \in \mathbb{R}_-^*$; se $x = 0$, então $x \in \{0\}$.

A relação de ordem $x < y$ tem as seguintes propriedades:

- 1) Transitividade: se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$

Se $x < y$ e $y < z$, então $\exists a, b \in \mathbb{R}_+^*$ de modo que $y = x + a$ e $z = y + b$, assim, $z = x + a + b$, para terminar, $z - x \in \mathbb{R}_+^*$, logo $z > x$.

- 2) Tricotomia: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, há 3 possibilidades: $x < y$, $x > y$ ou $x = y$

Com efeito, $y - x \in \mathbb{R}_+^*$ ou $y - x \in \mathbb{R}_-^*$ ou $y - x = 0$.

- 3) Monotonicidade da adição: se $x < y$, então $\forall z \in \mathbb{R}$, $x + z < y + z$

$(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}_+^*$, segue que $x + z < y + z$.

- 4) Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$, então $\forall z \in \mathbb{R}_+^*$, $xz < yz$. Por outro lado, $\forall z \in \mathbb{R}_-^*$, $xz > yz$.

1º caso. $y - x \in \mathbb{R}_+^*$ e $z \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow z \cdot (y - x) = zy - zx \in \mathbb{R}_+^*$, logo $zx < zy$.

2º caso. $y - x \in \mathbb{R}_+^*$ e $-z \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow -z \cdot (y - x) = -zy + zx = zx - zy \in \mathbb{R}_+^*$, logo $zx > zy$.

- 5) Em $\mathbb{R}$, se $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $y \in \mathbb{R}_-^*$, então $xy < 0$.

Como $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $-y \in \mathbb{R}_+^*$, $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -xy \in \mathbb{R}_+^*$, com isso, $xy \in \mathbb{R}_-^*$.

Logo, $xy < 0$.

- 6) Em $\mathbb{R}$, se $x \in \mathbb{R}_-^*$ e $y \in \mathbb{R}_-^*$, então $xy > 0$.

Como $-x \in \mathbb{R}_+^*$ e $-y \in \mathbb{R}_+^*$, $(-x) \cdot (-y) = -(x \cdot y) = xy \in \mathbb{R}_+^*$. Logo, $xy > 0$.

- 7) Em $\mathbb{R}$, se $x < y$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ou $x, y \in \mathbb{R}_-^*$ (ambos negativos ou positivos), então $y^{-1} < x^{-1}$.

$$y^{-1} - x^{-1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x - y}{xy} \in \mathbb{R}_-^* \Rightarrow y^{-1} - x^{-1} < 0 \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$$

- 8) Em $\mathbb{R}$, se $x < y$, com $x \in \mathbb{R}_-^*$ e $y \in \mathbb{R}_+^*$, então $y^{-1} > x^{-1}$.

$$y^{-1} - x^{-1} = \frac{x - y}{xy} \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow y^{-1} - x^{-1} > 0 \Rightarrow y^{-1} > x^{-1}$$

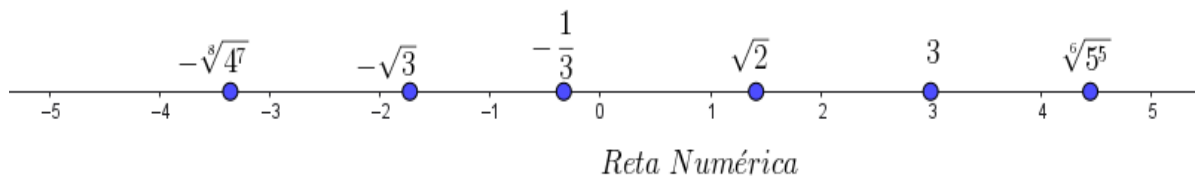
No corpo ordenado $\mathbb{R}$, $x \leq y$ significa que $x < y$ ou $x = y$, lê-se assim: x é menor do que ou igual a y . Isto equivale a $y \geq x$. Isto é, $y - x \in \mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$. $\mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$ é o conjunto dos números reais não negativos, caracterizados por $x \geq 0$.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, $x = y \leftrightarrow x \leq y$ e $y \leq x$. Mostrar que um número é igual a outro é afirmar que $x \leq y$ e $y \leq x$. Na relação de ordem $x \leq y$, a relação da tricotomia é substituída pela reflexibilidade ($x \leq x$) e antissimetria ($x = y \leftrightarrow x \leq y$ e $y \leq x$), mantendo-se as demais propriedades associadas à relação de ordem $x < y$.

O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

Mesmo $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ não é um corpo, por não ter inverso aditivo e nem inverso multiplicativo. Apesar de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ não é um corpo, por não ter inverso multiplicativo. O conjunto $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, pois satisfaz a $x, y \in \mathbb{Q}_+^* \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q}_+^*$ e $xy \in \mathbb{Q}_+^*$ e possui tanto inverso aditivo quanto inverso multiplicativo (para divisores não nulos), além disso, os seus elementos obedecem às propriedades intrínsecas à relação de ordem. Assim: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Os números reais são dispostos de forma ordenada na reta, denominada reta numérica:



O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, pois além de ser um corpo ordenado, tem a propriedade da completeza, que diz respeito ao fato de a reta numérica ser contínua, isto é, não deixar brechas. Para ampliar a noção sobre a completeza de $\mathbb{R}$, o conjunto $\mathbb{R}$ satisfaz a todas as propriedades das operações algébricas, todas as propriedades da relação de ordem e além de tudo é completo, porque se fosse preencher a reta numérica somente com números racionais, existiriam espaços em branco (descontinuidades), visto que todo número real pode ser escrito na forma decimal, mas nem todo número decimal pode ser escrito como uma fração de inteiros com denominador não nulo, por isso o conjunto $\mathbb{Q}$ não é um corpo ordenado completo. O conjunto $\mathbb{R}$ é o único corpo ordenado completo. A completeza é imprescindível para a existência das diversas classes de funções reais.

O número 0 é a origem da reta numérica e a decompõe de forma que os números negativos se localizam à esquerda dele e os números positivos localizam-se à direita dele. Os números reais crescem da esquerda para a direita na reta numérica.

2.4.5 Intervalos

São representações na reta numérica de subconjuntos de números reais que: ou estão entre dois números (segmento) ou estão à direita ou à esquerda de determinado número, neste caso, formando semirretas orientadas com origem nesse número.

Considere $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, os nove subconjuntos de $\mathbb{R}$ abaixo são intervalos:

- 1) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ é um intervalo fechado, os extremos a e b entram no intervalo



- 2) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ é um intervalo fechado à esquerda e aberto à direita, o extremo a entra no intervalo, mas o extremo b fica de fora do intervalo



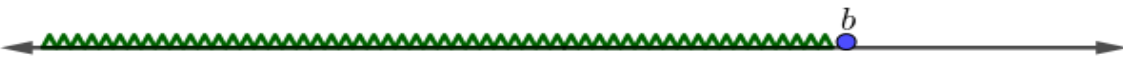
- 3) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ é um intervalo aberto à esquerda e fechado à direita, o extremo a não entra no intervalo, mas o extremo b entra no intervalo



- 4) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ é um intervalo aberto, os extremos ficam de fora do intervalo



- 5) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$ é a semirreta esquerda fechada com origem em b , b entra no intervalo



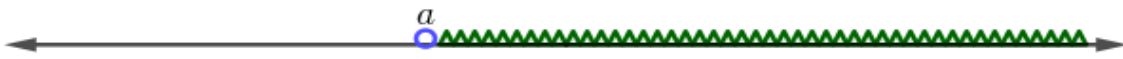
- 6) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$ é a semirreta esquerda aberta com origem em b , b não entra no intervalo



- 7) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$ é a semirreta direita fechada com origem em a , a entra no intervalo



- 8) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ é a semirreta direita aberta com origem a , a não entra no intervalo



- 9) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



Observação: os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ não correspondem a nenhum número em particular, quando se apresentam os intervalos $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b]$, só se está interessado em representar os números reais maiores que a e menores ou iguais que b , respectivamente.

Exemplos:

a) $[-1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$



b) $[-1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$



c) $(-1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$



d) $(-1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$



e) $(-\infty, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$



f) $(-\infty, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$



g) $[-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$



h) $(-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$



Quando se toma o intervalo de extremos a e b , sempre se pensa que $a < b$, mas pode acontecer de ele ser degenerado. O intervalo é degenerado quando admite $a = b$ para os extremos a e b , logo o intervalo degenerado é da forma $[a, a]$ e corresponde a um único ponto.

Exemplo. O intervalo $[3, 3]$ é degenerado, veja a sua representação abaixo:



Quando se tem $a < b$ no intervalo de extremos a e b , esse intervalo é chamado de não degenerado e possui uma das representações geométricas já apresentadas anteriormente.

Exemplo. O intervalo $[3, 7)$ é não degenerado já que $3 < 7$, veja a sua representação abaixo:



2.4.6 Valor Absoluto

O valor absoluto de um número real x , cuja simbologia é $|x|$, é o valor máximo entre os simétricos x e $-x$, sendo x , se $x \geq 0$, e $-x$, se $x < 0$. Logo:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observação: $|x| = 0$ se $x = 0$.

Logo, seja $x \in \mathbb{R}^*$, entre os valores x e $-x$, um é positivo e o outro é negativo, ocorre ambos iguais a zero se $x = 0$. Para $x \in \mathbb{R}^*$, $|x|$ é o valor positivo entre x e $-x$. Assim:

$$|x| = \max\{-x, x\}$$

Então, $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$.

Vem da definição que:

$$|x| \geq x \text{ e } |x| \geq -x \Leftrightarrow -|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemplo. $|7| = 7$ e $|-7| = 7$, neste último caso, $|-7| = -(-7)$, além de tudo, $-|7| \leq -7 \leq |7|$, sendo $-7 < |7| = |-7|$, e $-|7| \leq 7 \leq |7|$, sendo $7 = |7|$.

Se $a, x \in \mathbb{R}$, as afirmações abaixo equivalem-se:

- 1) $-a \leq x \leq a$;
- 2) $x \leq a$ e $-x \leq a$;
- 3) $|x| \leq a$.

Prova. $-a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \geq -a \text{ e } x \leq a \Rightarrow -x \leq a \text{ e } x \leq a \Leftrightarrow |x| \leq a$

Exemplo. $|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$.

Para $a, x, b \in \mathbb{R}$, $|x - a| \leq b \Leftrightarrow a - b \leq x \leq a + b$.

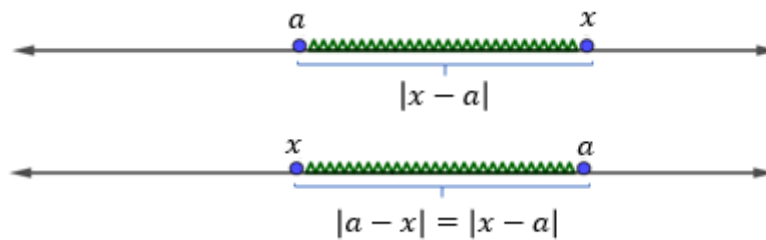
Prova. $|x - a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x - a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq x \leq a + b$

Exemplo. $|x - 3| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 3 < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 6$.

O valor absoluto $|x - a|$ representa a distância do ponto x ao ponto a na reta numérica, logo tem-se:

$$|x - a| = \begin{cases} x - a, & \text{se } x \geq a \\ -x + a, & \text{se } x < a \end{cases}$$

Se $x > a$, x está à direita de a , se $x < a$, x está à esquerda de a .

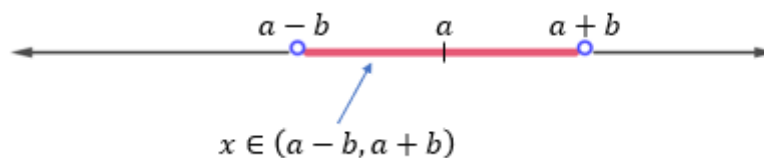


Exemplo: $|x - 6|$ é a distância do ponto x ao ponto 6 na reta real, com x à direita ou à esquerda de a , assim:

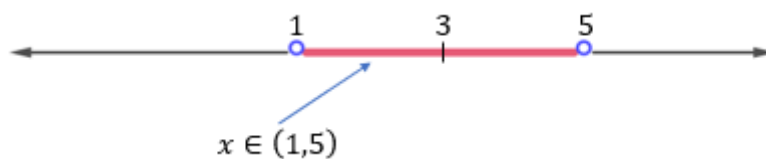
$$|x - 6| = \begin{cases} x - 6, & \text{se } x \geq 6 \\ -x + 6, & \text{se } x < 6 \end{cases}$$

É claro que $x - 6 = 0$ quando $x = 6$, ou seja, x é um ponto que coincide com o ponto 6, logo distância nula nesse caso.

Quando $|x - a| < b$, significa são os pontos da reta numérica onde a distância ao ponto a é menor que b , portanto tais pontos estão no intervalo aberto $(a - b, a + b)$ sendo o ponto a o centro e b o raio desse intervalo:



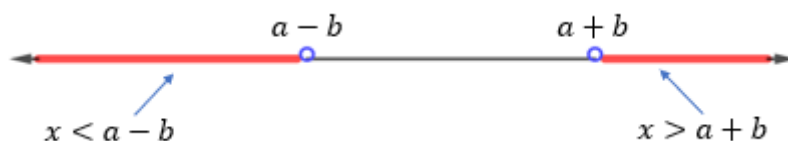
Exemplo. A expressão $|x - 3| < 2$ abarca o conjunto de números x em que sua distância ao ponto 3 é menor do que 2, logo o ponto 3 está no centro do intervalo aberto $(1, 5)$ e o seu raio é 2, devido à equivalência: $|x - 3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$. Segue a representação:



Quando $|x - a| > b$, quer dizer que:

$$\begin{cases} x - a > b, & \text{se } x > a \\ a - x > b, & \text{se } x < a \end{cases}$$

Que equivale a $x - a < -b$ ou $x - a > b$, isto é, $x < a - b$ ou $x > a + b$, portanto: $x \in (-\infty, a - b) \cup (a + b, +\infty)$. Veja a representação geométrica abaixo:



Exemplo:

$$|x - 3| > 2 \Leftrightarrow x - 3 < -2 \text{ ou } x - 3 > 2 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ou } x > 5 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$$



Para o valor absoluto, valem as seguintes propriedades:

I. $|x + y| \leq |x| + |y|$

Prova:

$$-|x| \leq x \leq |x| \text{ e } -|y| \leq y \leq |y| \Leftrightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$$

II. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Prova:

$$(|x \cdot y|)^2 = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 \Leftrightarrow |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

III. $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$

Prova:

$$a) ||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \Rightarrow |x| - |y| \leq ||x| - |y||$$

$$b) |x| \leq |x - y| + |y| \text{ e } |y| \leq |x - y| + |x| \Leftrightarrow |x - y| \geq |x| - |y| \text{ e } |x - y| \geq |y| - |x| \Leftrightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$|x - y| \geq |y| - |x| \Leftrightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$\text{Logo, } |x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

IV. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

$$\text{Prova. } x - z = (x - y) + (y - z) \Rightarrow |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

Exemplo. Considerando os números -1 e 2 , tem-se:

a) $|-1 + 2| < |-1| + |2|;$

b) $|-1 \cdot 2| = |-1| \cdot |2|;$

c) $|-1| - |2| < ||-1| - |2|| < |-1 - 2|.$

Exemplo. Considerando os números $-1, 2$ e 4 , tem-se:

a) $|-1 - 2| < |-1 - 4| + |4 - 2|;$

b) $|-1 - 4| = |-1 - 2| + |2 - 4|;$

c) $|2 - 4| < |2 - (-1)| + |-1 - 4|.$

2.4.7 Conjunto Denso

Um conjunto X , com $X \subset \mathbb{R}$, é denso quando para todo intervalo aberto (a, b) de números reais, $X \cap (a, b) \neq \emptyset$, ou seja, algum elemento de X pertence a (a, b) .

O conjunto $\mathbb{Q}$ e o conjunto $\mathbb{Q}'$ são densos em $\mathbb{R}$.

Prova. Dado $(a, b) \subset \mathbb{R}$, não degenerado, $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{p} < b - a$. Os números $\frac{m}{p}$, $m \in \mathbb{Z}$, decompõem a reta numérica em intervalos de comprimento $\frac{1}{p}$, como $\frac{1}{p} < b - a$, para algum m , $\frac{m}{p}$ deve cair dentro do intervalo (a, b) . Para algum $m \in \mathbb{Z}$, $\frac{m}{p} > b$. Para organizar a prova, tome $M = \left\{ m \in \mathbb{Z}; \frac{m}{p} \geq b \right\}$, por conta de $\mathbb{R}$ ser arquimediano, o conjunto M é não vazio de inteiros inferiormente limitado em $b \cdot p$, como consequência $\exists m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que m_0 é o elemento mínimo em M , desse modo $m_0 - 1 \notin M$, $a < \frac{m_0 - 1}{p} < b$, se não fosse assim, $\frac{m_0 - 1}{p} \leq a < b \leq \frac{m_0}{p}$, então $0 < b - a \leq \frac{m_0}{p} - \frac{(m_0 - 1)}{p} = \frac{1}{p}$, um absurdo. Portanto $a < \frac{m_0 - 1}{p} < b$ e assim o conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. A fim de demonstrar que o conjunto $\mathbb{Q}'$ é denso em $\mathbb{R}$, considere $\sqrt{5}$ e $0 < \frac{b-a}{\sqrt{5}}$, $\exists q \in \mathbb{N}$ de modo que $0 < \frac{1}{q} < \frac{b-a}{\sqrt{5}}$, dessa maneira $\frac{\sqrt{5}}{q} < b - a$, os números da forma $\frac{\sqrt{5}w}{q}$, para $w \in \mathbb{Z}$, são, exceto para $w = 0$, irracionais e dividem a reta $\mathbb{R}$ em intervalos de comprimento $\frac{\sqrt{5}}{q}$, portanto para algum w , $\frac{\sqrt{5}w}{q}$ cai dentro do intervalo aberto (a, b) . Como ocorreu para o caso do conjunto $\mathbb{Q}$, tome $P = \left\{ w \in \mathbb{Z}; \frac{w\sqrt{5}}{q} \geq b \right\}$, pelo fato de $\mathbb{R}$ ser arquimediano, o conjunto P é não vazio de números inteiros e limitado inferiormente em $\frac{b \cdot q}{\sqrt{5}}$, consequentemente $\exists w_0 \in \mathbb{Z}$ tal que w_0 é o menor elemento de P , implicando que $w_0 - 1 \notin P$, assim $a < \frac{(w_0 - 1)\sqrt{5}}{q} < b$, do contrário, $\frac{(w_0 - 1)\sqrt{5}}{q} \leq a < b \leq \frac{w_0\sqrt{5}}{q}$, daí $0 < b - a \leq \frac{w_0\sqrt{5}}{q} - \frac{(w_0 - 1)\sqrt{5}}{q} = \frac{\sqrt{5}}{q}$, um absurdo. Logo o conjunto $\mathbb{Q}'$ é denso em $\mathbb{R}$.

Por conseguinte, qualquer intervalo não degenerado de números reais contém infinitos números racionais e irracionais.

REALIZAÇÃO:



ACESSE NOSSO CATÁLOGO!



WWW.SEVENPUBLI.COM

CONECTANDO O **PESQUISADOR** E A **CIÊNCIA** EM UM SÓ CLIQUE.